ين الأول: (05 ن)

اء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

عرف بالمعادلة الديكارتية حيث $(P): x+2y+2z+2=0$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

1- بين ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r.

2- $B(3;2;0)$ نقطة من الفضاء .

- تحقق ان B تنتمي الى (S).
- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B.

3- بين ان (P) و (Q) متعامدان

4- (D) المستقيم المار من $C(1;1;1)$ و الموازي للمستويين (P) و (Q).

- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).
- احسب البعد بين النقطة Ω و المستقيم (D).

(D) يقطع (S) في نقطتين .(تحديدهما غير مطلوب)

ين الثاني: (06 ن)

ي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

I/ من اجل كل عدد مركب z نضع : $p(z)=z^3+(2\sqrt{2}-4)z^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}$

- احسب $p(-2\sqrt{2})$.
- بين ان $p(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$ حيث $a;b$ عددان حقيقيان يطلب تحديدهما.
- حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z)=0$.

II/ نضع النقط $C;B;A$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A=2+2i$. $Z_B=2-2i$ و $Z_C=-2\sqrt{2}\,i$

علم النقط $C;B;A$.

احسب طويلة لواحق النقط $C;B;A$ ثم بين انها تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

احسب عمدة العدد المركب Z_A و عمدة العدد المركب Z_B .ثم اثبت ان $\left(\vec{OB};\vec{OA}\right)=\frac{\pi}{2}$

عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

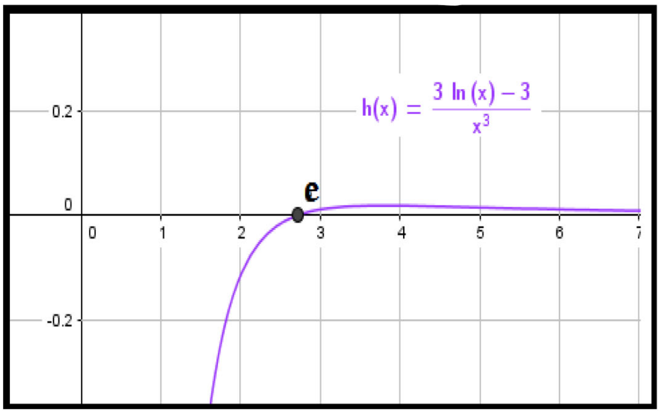
بين ان $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم فسر النتيجة

لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $z=2\sqrt{2}e^{i\theta}$.

أ) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

ب) عين طبيعة المجموعة (E') ثم أنشئها .

التمرين الثالث: (09 ن)



المنحنى البياني (C_h) للدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ ب: $h(x)=\dfrac{-3+3\ln(x)}{x^3}$

I) g دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل : $g(x)=1+\dfrac{3}{4x^2}-\dfrac{3\ln(x)}{2x^2}$

و ليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين ان $g'(x)=h(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة g.

3) بين أن المنحني (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما.

4) أدرس وضعية المنحني بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

5) أنشئ (C_g).

6) استنتج أنه مهما يكن $x\in]0,+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل : $f(x)=x+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3\ln x}{2x}$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.ثم بين ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

ب) بين أنه مهما يكن $x\in]0,+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

ب)أدرس وضعية"المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ ما ذا تستنتج بيانيا؟

3) أ) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يكون عندها المماس للمنحني (C_f) موازيا لـ (D) يطلب تعيين إحداثيها.

ب) بين أن معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة B هي : $y=x+\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

4) أنشئ المنحني (C_f) و المستقيمان (D) و(Δ)

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

تعطى $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^n}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ و $f(e^{\frac{1}{2}})=\dfrac{3+2e}{2\sqrt{e}}$ و $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$

التمرين الأول:

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارتية حيث $(P): x+2y+2z+2=0$

(S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

1- اثبات ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r.

لدينا $a=-2;b=-2;c=-4;d=-3$ ومنه $x_\Omega=-\dfrac{a}{2}=1; y_\Omega=-\dfrac{b}{2}=1; z_\Omega=-\dfrac{c}{2}=2$ و

$r^2=x^2+y^2+z^2+d=9$ ومنه $\Omega(1;1;2)$ و $r=3$

2- $B(3;2;0)$ نقطة من الفضاء. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$

- التحقق ان B تنتمي الى (S). لدينا $(3-1)^2+(2-1)^2+(0-1)^2=3$ محقق اي $B\in(S)$
- المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B. شعاعه الناظمي $\overrightarrow{\Omega B}(2,1,-2)$

ومنه $B\in(Q)$ يعني ان $d=-8$ أي $(Q): 2x+y-2z-8=0$

3- اثبات ان (P) و (Q) متعامدان

$\vec{n}_{(P)}(1;2;2)$ و $\overrightarrow{\Omega B}(2,1,-2)$ ومنه (P) $\overrightarrow{\Omega B}.\vec{n}_{(P)}=2+2-4=0$ و (Q) متعامدان

4- (D) المستقيم المار من $C(1;1;1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q).

- تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D). شعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$ يحقق $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{\Omega B}=0\\ \vec{u}.\vec{n}_{(P)}=0\end{cases}$

ومنه نحل الجملة $\begin{cases}2a+b-2c=0\\ a+2b+2c=0\end{cases}$ ناخذ c ثابت نجد $a=-b$ و $b=-2c$ اذن $\vec{u}(2,-2,1)$

اذن $t\in\mathbb{R}$ $(D):\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t+1\\ z=t+1\end{cases}$

- البعد بين النقطة Ω و المستقيم (D). و بوضع النقطة H مسقطها العمودي نجد $\overrightarrow{\Omega H}(2t;-2t;t-1)$

ومنه $\left(t=\dfrac{1}{7}\right)$; $\overrightarrow{\Omega H}\vec{u}=0; 4t+4t+t-1=0$ أي $\overrightarrow{\Omega H}\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{6}{7}\right)$ ومنه $\Omega H=\dfrac{\sqrt{44}}{7}$

اثبات ان (D) يقطع (S) في نقطتين .(تحديدهما غير مطلوب)

$r=3$ و $\Omega H=\dfrac{\sqrt{44}}{7}\simeq 1$ اذن $\Omega H<r$ يعني ان (D) يقطع (S) في نقطتين .

التمرين الثاني:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

I/ من اجل كل عدد مركب z نضع : $p(z)=z^3+(2\sqrt{2}-4)z^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}$

-1 حساب $p(-2\sqrt{2})$.

$$p(-2\sqrt{2})=\left(-2\sqrt{2}\right)^3+(2\sqrt{2}-4)\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)+16\sqrt{2}$$

$$p(-2\sqrt{2})=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}-32-16\sqrt{2}+32+16\sqrt{2}=0$$

-2 اثبات ان $p(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$ حيث $a;b$ عددان حقيقيان يطلب تحديدهما.

$$p(z)=z^3+az^2+bz+2\sqrt{2}z^2+2\sqrt{2}az+b2\sqrt{2}$$

$$p(z)=z^3+z^2\left(a+2\sqrt{2}\right)+z\left(b+2\sqrt{2}a\right)+b2\sqrt{2}$$

بالمطابقة نجد $a=-4;b=8$

ومنه $p(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2-4z+8\right)$

-3 حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z)=0$.

أي ان $\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2-4z+8\right)=0$ ومنه $z=-2\sqrt{2}$ و z^2-4z+8 أي $Z=2+2i$ و $Z=2-2i$

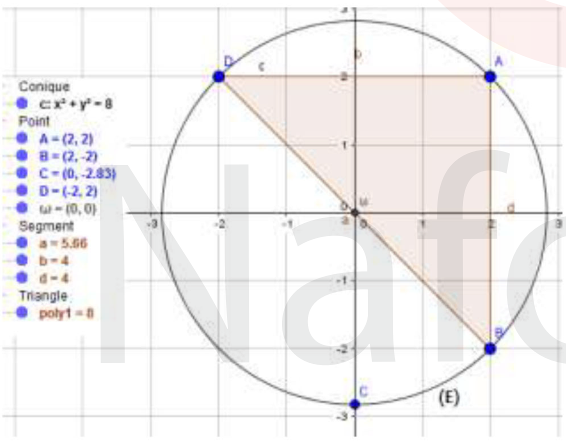
II/ نضع النقط $C;B;A$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A=2+2i$. $Z_B=2-2i$ و $Z_C=-2\sqrt{2}\,i$

-1 تعليم النقط $C;B;A$.

-2 حساب طويلة لواحق النقط $C;B;A$ لدينا $|Z_A|=|2+2i|=2\sqrt{2}$ و $|Z_B|=|2-2i|=2\sqrt{2}$ و

$|Z_C|=\left|-2\sqrt{2}\,i\right|=2\sqrt{2}$

نستنتج ان النقط $C;B;A$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) ذات المركز 0 ونصف قطرها $r=2\sqrt{2}$



-3 عمدة العدد المركب Z_A:

$$\arg\left(Z_A\right)\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{2}/2\\ \sin\theta=\sqrt{2}/2\end{cases}\theta=\frac{\pi}{4}$$

و عمدة العدد المركب Z_B:

$$\arg\left(Z_B\right)\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{2}/2\\ \sin\theta=-\sqrt{2}/2\end{cases}\theta=-\frac{\pi}{4}$$

اثبات ان

$$\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

-4 عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

لدينا $\frac{z_D+z_B}{2}=0$ ومنه $z_D=-2+2i$

-5 اثبات ان $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\frac{2-2i-2-2i}{-2+2i-2-2i}=i=e^{i\pi/2}$ العدد تخيلي صرف موجب

تفسير النتيجة المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

-6 لتكن (E') مجموعة النقط $\boldsymbol{M}$ ذات اللاحقة $\boldsymbol{Z}$ حيث : . $z=2\sqrt{2}e^{i\theta}$

أ) التحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

$z_D=2\sqrt{2}e^{i\theta}$ يعني ان $-2+2i=2\sqrt{2}e^{i\theta}$ وبما ان $|z_D|=|-2+2i|=2\sqrt{2}$ فان $D\in(E')$

ب) المجموعة (E') هي دائرة مركزها 0 ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ ثم أنشئا .

التمرين الثالث:

I) g دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل : $g(x)=1+\dfrac{3}{4x^2}-\dfrac{3\ln(x)}{2x^2}$

و ليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) تغيرات الدالة g. نعلم ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0;\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{3}{4x^2}-\frac{3\ln(x)}{2x^2}=1 \text{ و } \lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}1+\frac{3}{4x^2}-\frac{3\ln(x)}{2x^2}=+\infty$$

المشتقة g دالة تقبل الاشتقاق و دالتها المشتقة

$$g'(x)=-\frac{3\times8x}{16x^4}-\left(\frac{3(2x^2)}{x}-(4x)3\ln(x)\right)\frac{1}{4x^4}=-\frac{6x}{4x^4}-(6x-12x\ln(x))\frac{1}{4x^4}$$

ومنه $g'(x)=\dfrac{-6x-6x+12x\ln(x)}{4x^4}=\dfrac{-3+3\ln(x)}{x^3}$

اشارة المشتقة $g'(x)=0$ يعني ان $-3+3\ln(x)=0$ ومنه $x=e$

جدول التغيرات $=g(e)=1+\dfrac{3}{4e^2}-\dfrac{3\ln(e)}{2e^2}$

x	0 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$-3+3\ln(x)$	- $\qquad$ 0 $\qquad$ +
$x=e$	+
$g'(x)$	- $\qquad$ 0 $\qquad$ +
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↗ 0

2) المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين

الاول هو $x=0$ لان $\lim\limits_{x\to0}g(x)=+\infty$ والثاني هو $y=1$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$

3) وضعية المنحنى بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

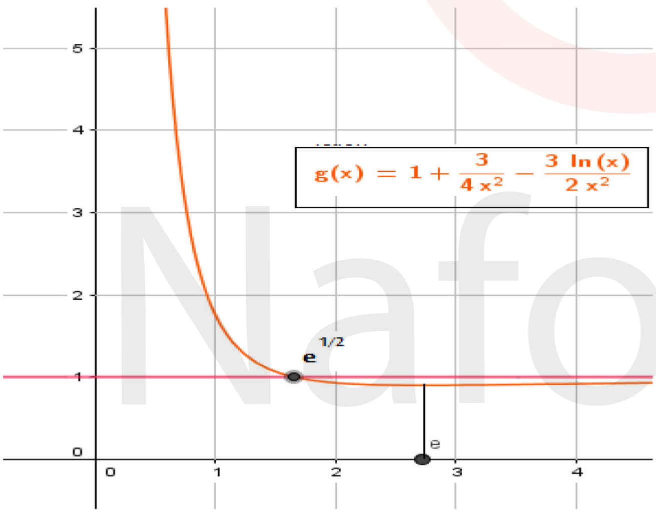
لدينا

$$g(x)-1=\frac{3}{4x^2}-\frac{3\ln(x)}{2x^2}=\frac{3-6\ln(x)}{4x^2}$$

ومنه $g(x)-1=0$ يعني $x=e^{\frac{1}{2}}$ أي

لما $x\in\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right[$ المنحنى (C_g) فوق $y=1$

ولما $x\in\left]e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$ المنحنى (C_g) تحت $y=1$



4) أنشئ (C_g).

5) من المنحنى و مهما يكن $x\in]0,+\infty[$, $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل : $f(x)=x+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3\ln x}{2x}$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3\ln x}{2x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x+\dfrac{3}{4x}+\dfrac{3\ln x}{2x}=+\infty$.

ت) بين أنه مهما يكن $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

الدالة f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x)=1-\dfrac{12}{16x^2}+\left(\dfrac{3}{x}2x-6\ln x\right)\dfrac{1}{4x^2}=1-\dfrac{3}{4x^2}+\dfrac{3}{2x^2}-\dfrac{3\ln x}{2x^2}$

ومنه $g(x) = \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} + f'(x) = 1$ من خلا المنحنى (C_g) وبما ان $g(x) > 0$, $x \in]0,+\infty[$

الدالة f متزايدة على المجال $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ) ثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = 0$ ومنه $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني

ب) وضعية"المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

$[f(x)-x] = \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = 0$ ومنه $3 + 6\ln x = 0$ اي ان $x = e^{-2}$

$x \in]0;e^{-2}[$ المنحنى (C_f) فوق (D) ولما $x \in]e^{-2};+\infty[$ المنحنى (C_f) تحت (D)

ث) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$

بما ان الدالة f متزايدة على المجال $]0,+\infty[$ ومستمرة فهي متزايدة ومستمرة على المجال $]1/2,1[$

وبما ان $f(1) \simeq 1,75$ و $f(0,5) = -0,08$ وبما ان $f(1) \times f(0,5) \le 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$f(\alpha) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$

نستنتج بيانيا ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α

3) النقطة الوحيدة B يكون عندها المماس للمنحني (C_f) موازيا لـ (D) أي $f'(x) = 1$ ومنه $f'(x) - 1 = 0$

$\frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} = 0$ أي $g(x) - 1 = 0$

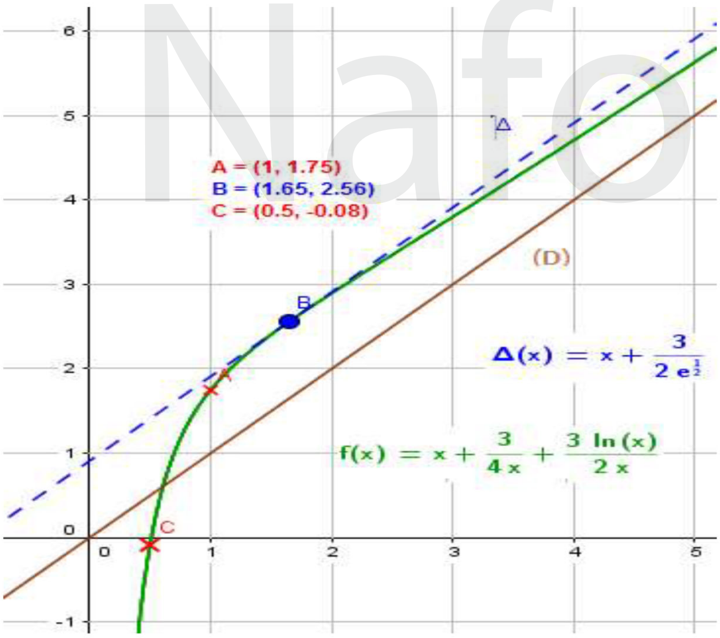
ومنه يعني $x = e^{\frac{1}{2}}$

ب) معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة B هي : $y = x + \frac{3}{2\sqrt{e}}$.

لان $y = \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ ومنه

$y = \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{3+2e}{2\sqrt{e}} = x + \frac{3}{2\sqrt{e}}$

4) الرسم



5) المناقشة البيانية

$m \in \left]-\infty;\frac{3}{2\sqrt{e}}\right[$ المعادلة تقبل حل وحيد

$m \in \left]\frac{3}{2\sqrt{e}};+\infty\right[$ المعادلة لا تقبل حلول